Sabih H. Gerez - Een analyse van het spel "memory", Verslag
65-middagenopdracht, Universiteit Twente, Faculteit der Elektrotechniek,
Vakgroep Informatica, januari-juni 1983. -- Deel 4 --

(eerste linker kolom).

$w(k, \frac{k}{2} - (N-1)) = k/2$ (tweede linker kolom).

Na enige tijd rekenen volgt dan.

$$(k+2N) f_6(k) = (k-2N) f_6(k-2) + V\langle 1, \frac{4N^2-2}{2N-1} \rangle \langle 0, -\frac{4N^2+8N}{2N-1} \rangle$$

Vermenigvuldig links en rechts met. $(k-2N+2) \ldots k \ldots (k+2N-2)$ en stel: $g_6(k) = (k-2N+2) \ldots k \ldots (k+2N-2)(k+2N)$.
We krijgen dan:

$$g_6(k) = g_6(k-2) + V\langle 2N, \frac{4N^2-2}{2N-1} \rangle \langle 2N-1, -\frac{4N^2+8N}{2N-1} \rangle$$

Door herhaalde substitutie van g_6 volgt:

$$g_6(k) = \sum_{L=l_0,\text{ even}}^{k} V_L \langle 2N, \frac{4N^2-2}{2N-1} \rangle \langle 2N-1, -\frac{4N^2+8N}{2N-1} \rangle + \text{"verwaarloosbare beginwaarde"}.$$

Na toepassing van stelling A.2 volgt.

$$g_6(k) = V\langle 2N+1, \frac{2N^2-1}{4N^2-1} \rangle \langle 2N, \frac{2N^2-N+1}{2N-1} \rangle$$

$$w_6(k, \tfrac{k}{2} - N) = f_6(k) = \frac{V\langle 2N+1, \frac{2N^2-1}{4N^2-1} \rangle \langle 2N, \frac{2N^2-N+1}{2N-1} \rangle}{V\langle 2N, 1 \rangle \langle 2N-1, 2N \rangle} = V\langle 1, \frac{2N^2-1}{4N^2-1} \rangle \langle 0, \frac{3N+1}{4N^2-1} \rangle$$

Dus.

$$w_6(k, \tfrac{k}{2} - N) \simeq \frac{(2N^2-1)k + 3N+1}{4N^2-1}$$

Uit dit laatste resultaat kunnen we de waarde van k bij de overgang $T_6 - T_2$ berekenen.

$$\frac{(2N^2-1)k + 3N+1}{4N^2-1} = \frac{k}{2} \iff$$

$$(4N^2-2)k + 3N+1 = (4N^2-1)k \iff$$

$$k = 6N+2$$

In onderstaande tabel vindt men een vergelijking tussen de computerberekeningen en onze benadering voor de overgang $T_6 - T_2$.

N	k, berekend	k, benaderd
1	8	8 (exact)
3	tussen 20 en 22	20
5	" 32 " 34	32
7	" 44 " 46	44
9	" 56 " 58	56
11	" 68 " 70	68

(We mogen niet ontevreden zijn).

§ 4.3.4 Wat kan er nog meer onderzocht worden?

Het eindresultaat van de vorige paragraaf is het laatste wat we onderzocht hebben. Het tijdstip van beeindiging van de opdracht was gekomen. Er is echter nog veel regelmaat in het taktiekenschema, dat theoretisch onderbouwd kan worden, nl.:

1. De afwisseling van T_5 en T_6 buiten het gebied rond de overgangen $T_6 - T_2$.
2. Het gedrag voor $S=0$.

3 Het aantonen van het feit dat we inderdaad met een optimale taktiek te maken hebben in de door ons wel onderzochte gevallen.

enz.

HOOFDSTUK 5 : VARIATIES OP HET SPEL

In dit hoofdstuk bekijken we een aantal variaties op het spel. We hebben bij geen van de varianten erg lang stilgestaan, gezien het feit dat we niet eens de analyse van het model met perfect geheugen geheel hebben afgerond.

Eén ding moeten we in de gaten houden op het moment dat we over varianten praten. Het model met perfect geheugen lijkt het eenvoudigste model te zijn, elke variant maakt de analyse van het model lastiger. Gezien de problemen die we in de hoofdstukken 3 en 4 zijn tegengekomen is er weinig hoop op dat de analyse van varianten mooie resultaten zal opleveren.

Mogelijke varianten zijn:

a) Een eindig geheugen.
We hebben het geheugenloze geval even bekeken. Er is dan maar één toestandsvariabele k (het aantal kaarten in het spel). De verwachte winst wordt gegeven door:

$$w(k) = \frac{1}{2k-3}\left[w(k-2) + k^2 - 2k + 2\right]$$

We hebben hier te maken met een zuiver kansspel, waarbij het voordeel van degene die begint minder wordt naarmate het aantal kaarten groter is.

b) 'Leg-apart-Memory':
Bij dit spel hebben de spelers een bijzonder soort geheugen: ze kunnen wel onthouden of een kaart

al een keer is omgedraaid, maar kunnen de omgedraaide kaarten niet van elkaar onderscheiden. We kunnen ook zeggen: de éénmaal omgedraaide kaarten worden apart van de onbekende kaarten gelegd. Iedere keer dat een kaart wordt toegevoegd aan de bekende kaarten worden deze door elkaar geschud.

Het is waarschijnlijk dat de werkelijkheid goed benaderd kan worden door een mengvorm van de varianten a) en b).

c) n-tallen i.p.v. tweetallen:
we moeten hierbij denken dat elke kaart in n-voud in het spel aanwezig is en dat elke speler in één keer n kaarten mag omdraaien.

d) meer dan 2 spelers.
In dit geval wordt het spel veel moeilijker te modelleren. We kunnen namelijk niet meer stellen dat bij beurtverlies in toestand $\langle k, B, P \rangle$ de verwachte winst gelijk is aan $k - w(k, B, P)$.

EPILOOG

Ik heb in de loop van deze opdracht mijn best gedaan om exact te zijn, geen mogelijkheden over het hoofd te zien, e.d. Toch heb ik tijdens het schrijven van het verslag nog enkele fouten ontdekt.

a) Het oorspronkelijke bewijs voor het feit dat T_1 de optim taktiek is voor $P \geq 2$ bleek niet te kloppen. Gelukkig is het me gelukt op tijd een ander (en mooier) bewijs te bedenken dat zelfs van toepassing is op het model waarin passen niet is toegestaan (zie § 3.7.1)

b) Bij het uitputtend nalopen van alle mogelijke taktieken bleek ik achteraf niet zo uitputtend te zijn geweest als ik had gedacht. Ik ben er steeds vanuit gegaan dat de spelers met perfect geheugen altijd van alle informatie die ze ter beschikking hadden gebruik zouden maken. Maar niets verbiedt ze om dat niet te doen. Er zijn bijvoorbeeld taktieken denkbaar waarbij kaarten worden omgedraaid, ongeacht of deze bekend of onbekend is. Deze taktieken hadden in de analyse meegenomen moeten worden, ook al is het onwaarschijnlijk dat er toestanden zijn waarvoor ze optimaal zijn. Het zal duidelijk zijn dat ik deze fout niet meer heb kunnen herstellen.

c) De korte analyse van de variant 'Leg-apart-Memory' (zie hoofdstuk 5) bevatte fouten en werd daarmee waardeloos, evenals het bijbehorende computerprogram. Daarom wordt er in het verslag niets over gezegd.

Het verslag bevat ongetwijfeld nog fouten die ik over het hoofd heb gezien. Ik zou graag op de hoogte gebracht willen worden van deze fouten; ook andere op- en aanmerkingen zijn welkom.

APPENDIX A: SOMFORMULES

Bij de oplossing van de differentievergelijkingen uit hoofdstuk 3 en 4 hebben gebruik gemaakt van expliciete schrijfwijzen voor uitdrukkingen van de volgende vorm: $\sum_{L=0,\text{even}}^{k} L^n$

Hoe kunnen we de expliciete uitdrukkingen vinden? We bekijken daartoe eerst de volgende vorm: $\sum_{i=1}^{n} i^k = s_k(n)$

$s_k(n)$ nu, is de oplossing van de volgende differentievergelijking. $s_k(n) - s_k(n-1) = n^k$.
Een manier om deze differentievergelijking op te lossen is de substitutie van een polynoom (in n) van de graad k+1 voor $s_k(n)$. Dus:

$$s_k(n) = a_{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0 \quad \text{en}$$
$$s_k(n-1) = a_{k+1}(n-1)^{k+1} + a_k(n-1)^k + \dots + a_1(n-1) + a_0$$

De onderstaande uitdrukkingen zijn op deze manier verkregen:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Een vorm als $\sum_{I=2,\text{even}}^{N} I^k$ is na substitutie van $J = I/2$ te herschrijven tot: $\sum_{J=1}^{N/2}(2J)^k = 2^k \sum_{J=1}^{N/2} J^k$, waarna een beroep kan worden gedaan op de "gewone" somformules $\sum_{i=1}^{n} i^k$.

Voor $k=1$ t/m $k=4$ vinden we op deze manier.

$$\sum_{I=2,\text{ even}}^{N} I = \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{2}N$$

$$\sum_{I=2,\text{ even}}^{N} I^2 = \frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3}N$$

$$\sum_{I=2,\text{ even}}^{N} I^3 = \frac{1}{8}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{2}N^2$$

$$\sum_{I=2,\text{ even}}^{N} I^4 = \frac{1}{10}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{2}{3}N^3 - \frac{4}{15}N.$$

Als de ondergrens niet gelijk is aan 2 kan de sommatie uitgedrukt worden als het verschil van twee sommaties met ondergrens twee.

Hieronder volgen nu een tweetal stellingen die van pas komen bij de oplossing van het genoemde type differentie vergelijkingen m.b.v. de VHM-rekening. We hebben dan genoeg aan de eerste twee termen van de somformule.

Stelling A.1 Voor iedere $k \geq 1$ geldt:

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k = V_n \langle k+1, \frac{1}{k+1} \rangle \langle k, \frac{1}{2} \rangle$$

Bewijs We gaan te werk alsof we met een vaste k te maken hebben en substitueren dus polynomen in de bovengenoemde differentievergelijking.

1) Vergelijking van de termen van de graad ℓ geeft

$$a_\ell + \binom{k+1}{1} a_{\ell+1} - a_\ell = 1$$

$$(\ell+1)\, a_{k+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

2) Vergelijking van de termen van de graad $\ell-1$ geeft

$$a_{\ell-1} - \binom{k+1}{2} a_{\ell+1} + \binom{\ell}{1} a_\ell - a_{\ell-1} = 0$$

$$a_{\ell-1} - \frac{(k+1)\ell}{2} a_{k+1} + \ell\, a_\ell - a_{\ell-1} = 0$$

$$a_\ell = \frac{k+1}{2} \cdot a_{k+1} = \frac{1}{2}. \qquad (Q.E.D)$$

Stelling A.2 Voor iedere $k \geq 1$ geldt:

$$\sum_{I=2,\text{ even}}^{N} I^k = V_N \langle k+1, \frac{1}{2(k+1)} \rangle \langle k, \frac{1}{2} \rangle$$

Bewijs Een rechtstreeks gevolg van stelling A.1. (Substitueer $J = I/2$).