Sabih H. Gerez - Een analyse van het spel "memory", Verslag 65-middagenopdracht, Universiteit Twente, Faculteit der Elektrotechniek, Vakgroep Informatica, januari-juni 1983. -- Deel 2 --

Randvoorwaarde: $k \geq B+1 \wedge B \geq 2$.

$w_3(K,B,P) = K - p_1 w(K, B+1, P+2) - p_2 w(k, B+1, P)$.

T_4 = <bzn, onb> of <onb, bzn>

Randvoorwaarde: $k \geq B+1 \wedge B \geq P+1$

$$w_4(k,B,P) = p_3[w(k-2, B-1, P)+2] + p_4[k - w(k, B+1, P+2)] + p_2[k - w(k, B+1, P)]$$

T_5 = <onb, ALS kbn DAN nek ANDERS $\left\{\begin{matrix} bmn \\ bzn \end{matrix}\right\}$>

Randvoorwaarde: $k \geq B+1 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$.

$$w_5(K,B,P) = p_1[w(K-2, B-1, P)+2] + p_2[k - w(K, B+1, P)]$$

T_6 = <onb, ALS kbn DAN nek ANDERS onb>

Randvoorwaarde: $k \geq B+2 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$

$$w_6(K,B,P) = p_1[w(K-2, B-1, P)+2] + p_2\left[p_5[w(K-2, B, P)+2] + p_6[k - w(k, B+2, P+2)] + p_7[k - w(k, B+2, P)]\right]$$

T_7 = <onb, onb>

Randvoorwaarde: $k \geq B+2$

$$w_7(K,B,P) = p_1\left[p_8[k - w(k, B+2, P+4)] + p_9[k - w(k, B+2, P+2)]\right] + p_2\left[p_5[w(k-2, B, P)+2] + p_6[k - w(k, B+2, P+2)] + p_7[k - w(K, B+2, P)]\right]$$

T_8 = <onb, ALS kbn DAN $\left\{\begin{matrix} bmn \\ bzn \end{matrix}\right\}$ ANDERS onb>

Randvoorwaarde: $K \geq B+2 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$

$$w_8(K,B,P) = p_1[K - w(K, B+1, P+2)] + p_2\left[p_5[w(K-2, B, P)+2] + p_6[k - w(k, B+2, P+2)] + p_7[k - w(k, B+2, P)]\right]$$

T_9 = <onb, ALS kbn DAN onb ANDERS $\left\{\begin{matrix} bmn \\ bzn \end{matrix}\right\}$>

Randvoorwaarde: $K \geq B+2 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$.

$$w_9(K,B,P) = p_1\left[p_8[k - w(K, B+2, P+4)] + p_9[k - w(k, B+2, P+2)]\right] + p_2[k - w(k, B+1, P)].$$

Opmerking: wanneer alle varianten van de 9 taktieken bij elkaar worden opgeteld komt men inderdaad tot 19 taktieken.

§ 3.4 De eigenlijke berekening

In § 3.2 hebben we al het één en ander gezegd over de berekeningsmethode. In deze paragraaf kunnen we iets meer zeggen nu we de formules voor de verschillende taktieken kennen.

Als we een spel in huis hebben met k_{max} kaarten, willen we de optimale taktiek en de bijbehorende winst weten voor alle toestanden die in het spel voor kunnen komen. Bij de berekening voor één bepaalde toestand hebben we de optimale verwachte winst van andere toestanden nodig. Het is daarom noodzakelijk om het resultaat van een één maal gedane berekening in een soort "tabel" op te slaan. (anders worden de berekeningen inefficiënt

Het komt er vervolgens op aan de toestanden in de juiste volgorde door te werken. Een blik op de formules van de vorige paragraaf geeft de nodige inzicht. We zien dan $w(k,B,P)$ wordt uitgedrukt in $w(k-2, \ldots, \ldots)$ of $w(K, B+C, P+Q)$ met $C \geq 1$ (behalve voor T_2) en $Q \geq 0$. We moeten de toestanden blijkbaar als volgt ordenen: van kleine k naar grote k en voor vaste k van grote B en P naar kleine B en P. We hadden reeds gevonden: $k \geq \frac{k+P}{2} \geq B \geq P \geq 0$. Zowel de boven- als de ondergrens van B wordt (voor vaste k) door P bepaald. We moeten daarom bij de berekening eerst

P kiezen (P krijgt achtereenvolgens de waarden k, k-2, ... 2,0) en daarna B van $\frac{k+P}{2}$ naar P laten variëren.

Er moet minstens één toestand zijn, waarvoor de winst al gegeven is, en dus niet volgt uit de recursieve betrekkingen. De winsten van alle taktieken zijn echter recursief gedefinieerd. Per definitie stellen we daarom:

$w(0,0,0) = 0$ (Als er geen kaarten meer op tafel liggen is het spel ten einde en kan er niets gewonnen worden.

We weten nu genoeg om de volgorde waarin de toestanden moeten worden berekend aan te geven:

$\langle 0,0,0\rangle \rightarrow \langle 2,2,2\rangle \rightarrow \langle 2,1,0\rangle \rightarrow \langle 2,0,0\rangle \rightarrow \langle 4,4,4\rangle \rightarrow \langle 4,3,2\rangle \rightarrow \quad \rightarrow \langle 4,1,0\rangle \rightarrow \langle 6,6,6\rangle \rightarrow \dots \rightarrow \langle k_{max},k_{max},k_{max}\rangle \rightarrow \quad \rightarrow \langle k_{max},0,0\rangle$.

Er is nog één probleem: zoals reeds opgemerkt komt in de formule voor T_2 de winstfunctie $w_2(k,B,P)$ zowel links als rechts van het =-teken voor. Doordat bij deze taktiek twee bekende kaarten worden omgedraaid, wordt de beurt afgestaan zonder dat de toestand verandert. Als T_2 voor één of andere toestand de optimale taktiek is dan geldt dat ook voor de tegenstander en komt er geen verandering in de toestand hoe lang het spel ook duurt.
De formule voor de winst $w(k,B,P) = k - w(k,B,P) \Rightarrow w(k,B,P) = \frac{k}{2}$ is in overeenstemming met wat het gezonde verstand voor zo'n situatie zegt, nl. ophouden met spelen en de resterende kaarten gelijkelijk delen.
T_2 komt dus neer op passen, dat echter niet voorkomt in de spelregels van Memory. We kunnen twee dingen

doen: 1. T_2 verbieden en dus niet in beschouwing nemen
2. T_2 toestaan.

De gedane berekeningen zijn voor beide mogelijkheden uitgevoerd. De resultaten worden besproken in § 3.6. Eerst volgt echter een paragraaf over de complexiteit van de berekening.

§ 3.5 De complexiteit van de berekening

De vraag die we ons stellen is: "Hoeveel toestanden worden er doorlopen om een tabel van toestand $\langle 0,0,0\rangle$ t/m toestand $\langle k_{max},0,0\rangle$ door te berekenen?". Het is niet moeilijk in te zien dat de benodigde rekentijd recht evenredig is met het aantal toestanden (per toestand wordt de winst voor negen taktieken berekend, waarna het maximum wordt bepaald).

Voor we het aantal toestanden gaan bepalen volgt hier een stelling en haar bewijs.

Stelling 3.1 $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ voor $m \leq n$.

Bewijs We maken gebruik van de bekende stelling.

$$\binom{i}{j} + \binom{i}{j+1} = \binom{i+1}{j+1}$$

(in de driehoek van Pascal is een getal de som van zijn "bovenburen". Het bewijs van deze hulpstelling volgt na uitschrijven van $\binom{i}{j} = \frac{i!}{(i-j)!\,j!}$).

Toegepast op $\binom{n+1}{m+1}$ geeft de stelling:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$$

We passen de stelling nogmaals toe op de tweede term van het rechterlid:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1}$$

Herhaalde toepassing van de stelling op de laatste term van het rechterlid geeft tenslotte:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \quad \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1}$$

Omdat $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m}$ kunnen we ook schrijven:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \dots \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m} = \sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m}$$

Q.E.D.

We gaan uit van de randvoorwaarde voor de toestand.

$$K \geq \frac{k+P}{2} \geq B \geq P \geq 0.$$

Het aantal toestanden voor vaste k en P $\overset{T(k,P)}{}$ wordt bepaald door de waarden die B kan aannemen:

$$T(k,P) = \frac{k+P}{2} - P + 1 = \frac{k-P}{2} + 1$$

Alle mogelijke toestanden bij vaste k, $TT(k)$, worden gevonden door over alle waarden van P te sommeren. Dus:

$$TT(k) = \sum_{P=0}^{k} \frac{k-P}{2} + 1 \qquad (\text{kies } Q = \tfrac{k-P}{P} + 1)$$

$$TT(k) = \sum_{Q=1}^{k/2+1} Q = \sum_{Q=1}^{k/2+1} \binom{Q}{1} \cdot \quad (\text{pas stelling 3.1 toe})$$

$$TT(k) = \binom{k/2+2}{2}$$

Tenslotte sommeren we over alle k van $k=0$ tot en met $k = k_{max}$ om alle te berekenen toestanden, $TTT(k_{max})$, te vinden:

$$TTT(k_{max}) = \sum_{k=0}^{k_{max}} \binom{k/2+2}{2} \qquad (\text{kies } L = \tfrac{k}{2} + 2)$$

$$TTT(k_{max}) = \sum_{L=2}^{\frac{k_{max}}{2}+2} \binom{L}{2} \qquad (\text{pas stelling 3.1 toe})$$

$$TTT(k_{max}) = \binom{\frac{k_{max}}{2}+3}{3}$$

$$= \frac{\left(\frac{k_{max}}{2}+3\right)\left(\frac{k_{max}}{2}+2\right)\left(\frac{k_{max}}{2}+1\right)}{3!}$$

$$= \frac{1}{48}\left(k_{max}^3 + 12k_{max}^2 + 44k_{max} + 48\right)$$

Zoals we al hadden kunnen vermoeden is de rekentijd dus grofweg evenredig met k_{max}^3.

De benodigde rekenruimte, ervan uitgaande dat we de tabel opslaan in een 3 dimensionaal array (met als componenten k, B en P) is ook evenredig met k_{max}^3, omdat de maximale B en P evenredig zijn met k_{max}. Echter, omdat we van het array alleen de "vlakken" voor k en $k-2$ nodig hebben (zie de recursieve formules) kunnen we één dimensie van het array beperken tot twee "vlakken". De benodigde ruimte is dan nog $\overset{\text{evenredig}}{\text{met}}$ k_{max}^2. (Dit is in het computerprogramma ook daadwerkelijk gedaan. Bovendien is nog een factor twee op de ruimte bespaard door gebruik te maken van het feit dat P altijd even is.)

§ 3.6 De resultaten

In eerste instantie is voor de berekeningen gebruik gemaakt van rationale aritmetiek, zoals in de opdrachtsomschrijving vermeld. Het bleek toen dat $k_{max} = 14$ de grootste k_{max}

was, waarbij tijdens de berekening het integerbereik van de computer niet werd overschreden. Het was uiteraard mogelijk dit probleem te omzeilen door ingewikkelder programmatuur. De verkregen rationale resultaten voor de verwachte winst vertoonden echter zo weinig regelmaat dat we de hoop op regelmaat voor grotere k_{max} opgaven en overgingen op het rekenen in reals

In tegenstelling tot de verwachte winsten bleek er wel regelmaat te zijn in de optimale taktieken. We hebben de berekeningen zowel voor het geval dat passen is toegestaan als dat passen niet is toegestaan uitgevoerd voor $k_{max} = 30$ (We hadden toen de indruk over voldoende resultaten te beschikken). Hieronder geven we de resultaten samengevat weer:

- Uit beide berekeningen kan worden geconcludeerd dat T_1 voor alle $P \geq 2$ altijd tot de optimale taktieken behoort.

- Voor P=0 is er ook enig regelmaat; dat blijkt wanneer de optimale taktieken in een tweedimensionaal schema, voortaan aan te duiden met taktiekenschema worden geplaatst. Deze schema's hebben we weergegeven op de volgende twee bladzijden (In de schema's schrijven we i in plaats van T_i).

Merk op dat in het schema voor "passen is niet toegestaan" T_8 als optimale taktiek verschijnt. Deze taktiek stelt dat, als er een paar ontstaat na het omdraaien van een onbekende kaart, dat paar niet moet worden opgepakt. Er is geen memory-speler die dit advies zou opvolgen.

(voor de volledige resultaten: zie de bijlage)

TAKTIEKENSCHEMA VOOR DE TOESTANDEN <k, B, 0>

PASSEN IS WEL TOEGESTAAN

k ↓ \ B →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	—															
2	7	4														
4	7	6	5/6													
6	7	4	6	5/6												
8	7	6	5	2/6	5/6											
10	7	4	6	5	2	5/6										
12	7	6	5	6	5	2	5/6									
14	7	4	6	5	6	5	2	5/6								
16	7	6	5	6	5	6	5	2	5/6							
18	7	4	6	5	6	5	6	5	2	5/6						
20	7	6	5	6	5	6	5	6	5	2	5/6					
22	7	4	6	5	6	5	6	5	2	5	2	5/6				
24	7	6	5	6	5	6	5	6	5	2	5	2	5/6			
26	7	4	6	5	6	5	6	5	6	5	2	5	2	5/6		
28	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	2	5	2	5/6	
30	7	4	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	2	5	2	5/6

TAKTIEKEN SCHEMA VOOR DE TOESTANDEN <K,B,0>

PASSEN IS NIET TOEGESTAAN.

K ↓ \ B ↘	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-															
2	7	4														
4	7	6	5/6													
6	7	4	6	5/6												
8	7	6	5	6	5/6											
10	7	4	6	5	6	5/6										
12	7	4	5	6	5	6	5/6									
14	7	6	5	5	6	5	6	5/6								
16	7	4	6	5	5	6	5	6/8	5/6							
18	7	4	5	5	5	5	6	5	8	5/6						
20	7	6	5	5	5	6	5	6	5	8	5/6					
22	7	4	6	5	5	5	6	5	6	5	8	5/6				
24	7	6	5	6	5	5	5	6	5	6	5	8	5/6			
26	7	4	6	5	6	5	5	5	6	5	6	5	8	5/6		
28	7	6	5	6	5	6	5	5	5	6	5	6	5	8	5/6	
30	7	4	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	8	5/6

§3.7 Pogingen tot theoretische onderbouwing van de resultaten

Met theoretische onderbouwing wordt hier zoiets bedoeld als: kunnen we de gevonden regelmaat verklaren, louter uitgaande van de recursieve formules voor de taktieken? Kunnen we dan ook voorspellingen doen omtrent de optimale taktiek in een toestand waar we geen computerberekeningen van hebben? Ideaal zou zijn wanneer de optimale strategie voor het spel zich liet beschrijven in enkele regels, zodat de tabel die voor iedere toestand de optimale taktiek geeft gemist kan worden. De tabel wordt voor grote k_{max} immers onhandelbaar groot (zie §3.5).

§3.7.1 T_1 is altijd optimaal in zijn toepassingsgebied

Als eerste hebben we geprobeerd te bewijzen, dat voor alle toestanden met $P \geq 2$ T_1 altijd tot de optimale taktieken behoort. D.w.z.: $w(K,B,P) = w(K-2,B-2,P-2)+2$ voor $P \geq 2$.

Ofwel: $w(K,B,P) = w(K-P,B-P,0)+P$ voor $P \geq 2$.

(De laatste bewering wordt verkregen door herhaalde toepassing van de eerste; het betekent dat we met twee i.p.v. drie toestandsvariabelen kunnen volstaan.)

Hieronder volgt eerst een poging tot bewijs dat heel algemeen is opgezet. Het leidt helaas niet tot een zinnig resultaat. Daarna zal blijken dat het bewijs wel kan worden geleverd wanneer er een zekere beperking aan de taktieken wordt opgelegd. (maar deze beperking sluit geen van de taktieken T_2 t/m T_9 uit).

a) Een mislukte poging tot bewijs

Een willekeurige taktiek T_x heeft als verwachte winst (zie ook § 3.2.2):

$$w_x(k,B,P) = \sum_{i=1}^{m} p_i\left[w(k-2,B_i,P_i)+2\right] + \sum_{j=1}^{n} p_j\left[k - w(k,B_j,P_j)\right]$$

Er geldt: $\sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

$B_i = B, B-1$ (of $B-2$, alleen als $m=1$ en $p_i=1$ en dus $T_x = T_4$)
$P_i = P$ (of $P-2$, alleen als $T_x = T_1$)
$B_j = B+1, B+2$ (of B, alleen als $T_x = T_2$)
$P_j = P, P+2$ of $P+4$
(Ga na dat alle taktieken T_1 t/m T_9 van deze vorm zijn).

Beschouw het verschil $w_1(k,B,P) - w_x(k,B,P)$ voor $P \geq 2$.
We proberen door te schatten een ondergrens voor dit verschil te vinden en hopen dat dit verschil groter of gelijk is aan nul.

We stellen dat. $\frac{k}{A} \leq w(k,B,P) \leq k$ met $A \geq 1$. Om de schatting voor de ondergrens te rechtvaardigen hoeven we alleen aan te tonen dat er geen enkele toestand is, waarvan de verwachte (maximale) winst gelijk is aan nul. Wel, de taktiek die twee willekeurige kaarten omdraait heeft al een verwachte winst groter dan nul en is voor elke toestand toepasbaar.

$$w_1(k,B,P) - w_x(k,B,P) = w(k-2,B-2,P-2)+2 - \sum_{i=1}^{m} p_i\left[w(k-2,B_i,P_i)+2\right] - \sum p_j\left[k - w(k,B_j,P_j)\right]$$

Een ondergrens voor deze uitdrukking vinden we door de positieve termen die een $w(k,B,P)$ bevatten zo klein mogelijk en de negatieve termen zo groot mogelijk af te schatten.

We krijgen dan:

$$w_1(k,B,P) - w_x(k,B,P) \geq \frac{k-2}{A} + 2 - \sum_{i=1}^{m} p_i(k-2) - \sum_{i=1}^{m} p_i 2 - \sum_{j=1}^{n} p_j k + \sum_{j=1}^{n} \frac{k}{A}$$

(We stellen voor het gemak $\sum_{i=1}^{m} p_i = p_m$ en $\sum_{j=1}^{n} p_j = p_n$; $p_m + p_n = 1$)

$$= \frac{k}{A} - \frac{2}{A} + 2 - p_m(k-2) - p_m 2 - p_n k + p_n \frac{k}{A}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{A}\right) + \left(\frac{1+p_n}{A} - 1\right) k$$

Als het verschil $w_1 - w_x$ voor willekeurige k positief is, moet gelden dat de coëfficiënt van k in bovenstaande uitdrukking groter of gelijk aan nul moet zijn.
Dus: $\frac{1+p_n}{A} - 1 \geq 0$

Ofwel: $A \leq 1 + p_n$.
p_n varieert tussen 0 en 1 en we hadden al $A \geq 1$. Dit betekent dat: $1 \leq A \leq 2$.
$A=2$ is de kleinste A die we kunnen garanderen, n.l. met behulp van de pasregel. Maar de waarde $A=2$ wordt alleen dan aangenomen, wanneer $p_n = 1$, d.w.z. wanneer geen van de denkbare taktieken uitsluit bied op het winnen van twee kaarten. Dit is in tegenspraak met de praktijk.

b) Een geslaagde poging tot bewijs.

Beschouw dezelfde $w_x(k,B,P)$ als onder a).
Uit de computerberekeningen is gebleken dat T_1 voor alle berekende toestanden, waarop het van toepassing is, optimaal is. We gaan er nu vanuit dat er een toestand $\langle k_{min}, B_{max}, P_{max} \rangle$ is, met $P_{max} \geq 2$, waarvoor T_x een grotere winst oplevert dan T_1. Voor alle toestanden $\langle k,B,P \rangle$ met $k < k_{min}$ is T_1 nog optimaal, voor $k = k_{min}$ en $P > P_{max}$ geldt hetzelfde, tenslotte voor $k = k_{min}$ en $P = P_{max}$ geldt

ook weer dat T_1 optimaal is voor $B > B_{max}$. (Bedenk dat alle toestanden lineair geordend kunnen worden en in die volgorde ook worden doorgerekend.).

$$w_x(k_{min}, B_{max}, P_{max}) = \sum_{i=1}^{m} p_i\left[w(k_{min}-2, B_i, P_i)+2\right] + \sum_{j=1}^{n} p_j\left[k_{min} - w(k_{min}, B_j, P_j)\right]$$

Omdat $k_{min}-2 < k_{min}$ en $P_i \geq 2$ geldt: $w(k_{min}-2, B_i, P_i) = w(k_{min}-4, B_i-2, P_i-2) + 2$.

Evenzo omdat $B_j > B_{max}$ (tenzij $T_x = T_2$) en $P_j \geq 2$ geldt:

$$w(k_{min}, B_j, P_j) = w(k_{min}-2, B_j-2, P_j-2) + 2$$

Dus geldt:

$$w_x(k_{min}, B_{max}, P_{max}) = \sum_{i=1}^{m} p_i\left[w(k_{min}-4, B_i-2, P_i-2)+4\right] + \sum_{j=1}^{n} p_j\left[k_{min}-2 - w(k_{min}-2, B_j-2, P_j-2)\right]$$

(mits $T_x \neq T_2$)

Stel nu dat we in de toestand $\langle k_{min}, B_{max}, P_{max}\rangle$ eerst beginnen met T_1 toe te passen:

$$w_1(k_{min}, B_{max}, P_{max}) = w(k_{min}-2, B_{max}-2, P_{max}-2) + 2$$

De bewering is nu dat we in de nieuwe toestand $\langle k_{min}-2, B_{max}-2, P_{max}-2\rangle$ T_x kunnen toepassen. (Afgezien van de vraag of T_x voor deze toestand de optimale taktiek is.)
Als de p_i en p_j geen willekeurige functies van k, B en P zijn maar functies van k-B en B-P (dit is het geval voor alle kansen p_1 t/m p_9, die in de winstfuncties van T_3 t/m T_9 voorkomen) dan zijn de p_i en de p_j zowel voor $w_x(k_{min}, B_{max}, P_{max})$ als $w_x(k_{min}-2, B_{max}-2, P_{max}-2)$ gelijk.
We kunnen dus schrijven:

$$w_1(k_{min}, B_{max}, P_{max}) \geq 2 + w_x(k_{min}-2, B_{max}-2, P_{max}-2) =$$
$$2 + \sum_{i=1}^{m} p_i\left[w(k_{min}-4, B_i-2, P_i-2)+2\right] + \sum_{j=1}^{n} p_j\left[k_{min}-2 - w(k_{min}-2, B_j-2, P_j-2)\right]$$

(Ga na dat als B_{max} met B_i correspondeert ook $B_{max}-2$ met B_i-2

correspondeert, enz.)

En dus geldt: $w_1(k_{min}, B_{max}, P_{max}) - w_x(k_{min}, B_{max}, P_{max})$

$$\geq 2 - \sum_{i=1}^{m} p_i 2 = 2p_n \geq 0 \quad (\text{mits } T_x \neq T_2)$$

We zijn ervan uitgegaan dat T_x in toestand $\langle k_{min}, B_{max}, P_{max}\rangle$ de optimale taktiek was en hebben nu gevonden dat er voor dezelfde toestand een betere taktiek is: tegenspraak. De aanname moet dus verworpen worden.

Het geval $T_x = T_2$ moet nader onderzocht worden.

$$w_2(k_{min}, B_{max}, P_{max}) = \frac{k_{min}}{2}$$

We vallen weer terug op de onder a) gegeven afschatting:

$$\frac{k}{A} \leq w(k, B, P) \leq k.$$

$$w_1(k_{min}, B_{max}, P_{max}) = 2 + w(k_{min}-2, B_{max}-2, P_{max}-2) \geq 2 + \frac{k_{min}-2}{A}$$

Voor het verschil $w_1 - w_2$ vinden we dan:

$$w_1(k_{min}, B_{max}, P_{max}) - w_2(k_{min}, B_{max}, P_{max}) \geq 2 + \frac{k_{min}-2}{A} - \frac{k_{min}}{2}$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{A}\right) + k_{min}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{2}\right)$$

Om te bewerkstelligen dat T_1 altijd beter is dan T_2 moet de coëfficiënt van k_{min} groter dan of gelijk aan nul zijn:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{Ofwel: } A \leq 2$$

De kleinste A die we kunnen garanderen is $A = 2$: de pasregel zorgt ervoor. De pasregel kan echter niet altijd toegepast worden. Stel dat voor $\langle k_{min}, 3, 2\rangle$ T_2 beter is dan T_1 dan kan in $\langle k_{min}-2, 1, 0\rangle$ niet worden gepast en kunnen we de afschatting niet maken. De problemen worden omzeild door een "onvoorwaardelijke pas"; zie hiervoor het eind van § 3.7.3.)

Uit het bovenstaande volgt de volgende stelling:

Stelling 3.2 T_1 is optimaal voor alle toestanden $<k, n, p>$ met $p \geq 2$.

- Als passen niet is toegestaan zijn er geen problemen.
- Als passen wel is toegestaan, worden problemen vermeden als passen tevens "onvoorwaardelijk" is.

§ 3.7.2 Onderzoek van de toestanden met P=0.

Wanneer we de taktiekenschema's bekijken zien we dat voor de toestanden $<k, \frac{k}{2} - N, 0>$, met $0 \leq N \leq \frac{k}{2}$, voor vaste N, reeksen van gelijke optimale taktieken voorkomen. In deze paragraaf zullen we deze toestanden voor enkele waarden van N nader bekijken.

N=0

Dit geval is triviaal. Immers $<k, \frac{k}{2}, 0>$ wil zeggen dat van alle paren één kaart bekend is. Wanneer men met een onbekende kaart begint is er voor elke kaart een bekende nevenkaart te vinden. Zo kunnen alle kaarten worden opgepakt. T_5 en T_6 zijn voor dit geval identiek en geven $w(k, \frac{k}{2}, 0) = k$.

N=1

a) passen is wel toegestaan

Voor k=4,6 en 8 zien we dat T_6 de optimale taktiek is. Hoe ziet dan de winstfunctie eruit?

$$w_6(k, \tfrac{k}{2}-1, 0) = \frac{\frac{k}{2}-1}{\frac{k}{2}+1}\left[w(k-2, \tfrac{k-2}{2}-1, 0)+2\right] +$$

$$+ \frac{2}{\frac{k}{2}+1}\left[\frac{1}{k/2}\cdot\left[w(k-2, \tfrac{k-2}{2}, 0)+2\right] + \frac{\frac{k}{2}-1}{k/2}\cdot\left[k - w(k, \tfrac{k}{2}+1, 2)\right]\right]$$

Er geldt: $w(k-2, \frac{k-2}{2}, 0) = k-2$ (N=0)

en: $w(k, \frac{k}{2}+1, 2) = w(k-2, \frac{k-2}{2}, 0) + 2 = k$

We krijgen dus:

$$w_6(k, \tfrac{k}{2}-1, 0) = \frac{k-2}{k+2}\left[w(k-2, \tfrac{k-2}{2}-1, 0)+2\right] + \frac{4}{k+2}\left[\frac{2}{k}\cdot k + \frac{k-2}{k}\left(k-(k-2+2)\right)\right]$$

Met $f_6(k) = w_6(k, \frac{k}{2}-1, 0)$ krijgen we dan:

$$(k+2) f_6(k) = (k-2) f_6(k-2) + 2k + 4$$

Deze differentievergelijking wordt opgelost door beide leden eerst met k te vermenigvuldigen:

$$(k+2)k\, f_6(k) = k(k-2) f_6(k-2) + (2k+4)k$$

Met $g_6(k) = (k+2)k\, f_6(k)$ krijgen we dan.

$$g_6(k) = g_6(k-2) + 2k^2 + 4k$$

Door herhaalde substitutie van deze uitdrukking in zijn rechterlid verkrijgt men:

$$g_6(k) = \sum_{l=4,\,even}^{k} (2l^2+4l) + g(2)$$
$$= \sum_{l=2,\,even}^{k} (2l^2+4l) - \sum_{l=4,\,even}^{4} (2l^2+4l) + g(2)$$

Door gebruik te maken van de somformules uit Appendix A vindt men dan:

$$g_6(k) = 2\left[\tfrac{1}{6}k^3+\tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{1}{3}k\right]+4\left[\tfrac{1}{4}k^2+\tfrac{1}{2}k\right]-16-4.2.w(2,0,0)$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[k^3+6k^2+8k\right]$$

$$w_6(k,\tfrac{k}{2}-1,0) = f_6(k) = \frac{g_6(k)}{k(k+2)} = \frac{k+4}{3}.$$

Dit resultaat is geheel in overeenstemming met de computerberekeningen.
Uit het taktiekenschema blijkt dat T_2 en T_6 voor $k=8$ allebei optimaal zijn en dat voor $k \geq 10$ T_2 optimaal wordt. Het eerste volgt uit

$$\frac{k+4}{3} = \frac{k}{2} \Rightarrow k=8$$

We stellen ons de vraag: Is T_2 optimaal voor alle $k \geq 10$?
Het antwoord vinden we door alle verschillen $w_i(k,\frac{k}{2}-1,0) + - w_2(k,\frac{k}{2}-1,0)$ voor alle T_i die van toepassing zijn te bekijken. We stellen dat k de kleinste waarde is waarvoor het verschil positief is en dat dus voor $<k-2,\frac{k-2}{2}-1,0>$ T_2 nog de optimale taktiek is. Vervolgens leiden we af dat deze aanname tot een tegenspraak leidt.
Beschouw bijvoorbeeld T_5.

$$w_5(k,\tfrac{k}{2}-1,0) - w_2(k,\tfrac{k}{2}-1,0)$$
$$= p_1\left[w(k-2,\tfrac{k-2}{2}-1,0)+2\right]+p_2\left[k-w(k,\tfrac{k}{2},0)\right]-\frac{k}{2}$$

Na invullen van: - p_1 en p_2
- $w(k-2,\frac{k-2}{2}-1,0) = \frac{k-2}{2}$ (aanname)
- $w(k,\frac{k}{2},0) = k$ $(N=0)$

volgt:

$$= \frac{k-2}{k+2}\cdot\left[\frac{k-2}{2}+2\right]+\frac{4}{k+4}\left[k-k\right]-\frac{k}{2} = -1$$

Het verschil is altijd negatief en we concluderen dus dat T_2 altijd superieur is aan T_5 voor alle $k \geq 10$.
Op deze manier hebben we alle taktieken onderzocht en kwamen steeds tot een tegenspraak. T_2 blijft inderdaad "tot in het oneindige" optimaal.

b) passen is niet toegestaan

Uit het taktiekenschema blijkt dat T_6 optimaal is voor $4 \leq k \leq 16$. De formule $w_6(k,\frac{k}{2}-1,0) = \frac{k+4}{3}$ blijft ook hier geldig. We zullen nu aantonen dat voor $k=16$ T_8 dezelfde verwachte winst oplevert als T_6.

$$w_8(k,\tfrac{k}{2}-1,0)-w_6(k,\tfrac{k}{2}-1,0) = p_1\left[k-w(k,\tfrac{k}{2},2)\right]+p_2\left[p_5\left[w(k-2,\tfrac{k-2}{2},0\right]+\right.$$
$$\left. p_6\left[k-w(k,\tfrac{k}{2}+1,2)\right]+p_7\left[k-w(k,\tfrac{k}{2}+1,0)\right]-\frac{k+4}{3}\right.$$

Na enig uitwerken (analoog aan de uitwerking van w_6 onder a)) krijgen we:

$$= \frac{k-2}{k+2}\left[k-2-w(k-2,\tfrac{k-2}{2}-1,0)\right]+\frac{8}{k+2}-\frac{k+4}{3}$$

Voor $w(k-2,\frac{k-2}{2}-1,0)$ kunnen we $w_6(k-2,\frac{k-2}{2}-1,0)$ invullen (we zijn op zoek naar de overgang $T_6 - T_8$; vóór de overgang is T_6 optimaal). Verdere uitwerking geeft:

$$= \frac{(k-16)(k-2)}{3(k+2)}$$

Voor $k=16$ en $k=2$ geldt dus $w_6 = w_8$. $k=2$ voldoet niet, omdat we "$\frac{k+4}{3}$" afgeleid hebben voor $k \geq 4$). $k=16$ komt overeen met het taktiekenschema.

Het bewijs dat voor $k \geq 18$ T_8 optimaal blijft laten we over aan de belangstellende lezer.

VERSLAG / RAPPORT

VERVOLGVEL NR. 34 | DATUM:

N = 2

Hier is voor beide gevallen T_5 de optimale taktiek voor $k \geq 8$. We zouden graag bewijzen dat T_5 de optimale taktiek blijft voor grote K. We zullen dit niet doen, maar volstaan met het aangeven van de bewijsmethode:
- los de differentie-vergelijking op die de uitwerking van $w_5(k, \frac{k}{2}-2, 0)$ oplevert. We hebben nu een explicite formule voor $w_5(k, \frac{k}{2}-2, 0)$ en ook $w_5(k-2, \frac{k-2}{2}-2, 0)$.
- zoek de minimale k waarvoor geldt $w_i(k, \frac{k}{2}-2, 0) + - w_5(k-2, \frac{k-2}{2}-2, 0) > 0$. Toon aan dat geen enkele T_i die toegepast kan worden voldoet.

N ≥ 3?

De hierboven gebruikte technieken zijn in principe voor alle N toepasbaar niets meer van kleine naar grote N werkt. Er zijn echter twee bezwaren.
1. De hoeveelheid rekenwerk is enorm.
2. Er komt geen eind aan het rekenwerk, omdat we de berekening doen voor $N = N_0$ en niet voor N in het algemeen. We zouden graag een bepaalde regelmaat ontdekken en die dan bewijzen met volledige inductie naar N. Daar is echter weinig hoop op.

We moeten daarom een andere weg inslaan. We zouden bijvoorbeeld sommige taktieken kunnen elimineren om het rekenwerk te verlichten en het overzicht te vergroten. Daarover gaat de volgende paragraaf.

VERVOLGVEL NR. 35 | DATUM:

§ 3.7.3 Eliminatie van taktieken?

We beginnen met een concreet voorbeeld. Is de verwachte winst van T_5 beter dan die van T_4 voor de toestanden waarin ze beide van toepassing zijn ($k \geq B+1 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$)? De taktiekenschema's suggereren dat wel.

We maken weer gebruik van de afschatting: $\frac{k}{A} \leq w(k,B,P) \leq k$ met $A \geq 1$.

$$w_5(k,B,P) - w_4(k,B,P) = p_1[w(k-2,B-1,P)+2] - p_3[w(k-2,B-1,P)+2] + - p_4[k - w(k,B+1,P+2)]$$

(met $p_1 - p_3 = p_4$)

$$= p_4[w(k-2,B-1,P)+2-k+w(k,B+1,P+2)]$$
$$\geq p_4\left[\frac{k-2}{A}+2-k+\frac{k}{A}\right]$$
$$= p_4\left[2\left(1-\frac{1}{A}\right)+\left(\frac{2}{A}-1\right)k\right]$$

Wil de laatste uitdrukking voor alle k positief zijn, dan moet de coëfficiënt van k positief zijn. Dus:

$\frac{2}{A}-1 \geq 0$, ofwel $A \leq 2$

$A=2$ is de kleinste A die we kunnen garanderen. Passen moet dan wel toegestaan zijn.
Er is echter nog een probleem: de pasregel is niet altijd van toepassing (alleen als $B \geq 3 \vee (B \geq 2 \wedge P=0)$).
Om eliminaties zoals deze (waarvan er veel meer mogelijk zijn) mogelijk te maken stellen we voor de volgende spelregel in te voeren:

gewijzigde pasregel: een speler mag onder alle omstandigheden passen. Hij hoeft dat dus niet indirekt te doen door bekende kaarten om te draaien.