Sabih H. Gerez - Een analyse van het spel "memory", Verslag 65-middagenopdracht, Universiteit Twente, Faculteit der Elektrotechniek, Vakgroep Informatica, januari-juni 1983. -- Deel 3 --

Het blijkt dat na invoering van deze spelregel het spel heel wat vereenvoudigd kan worden. Het is dan ook mogelijk de resultaten beter theoretisch te onderbouwen. Het hele volgende hoofdstuk is aan deze nieuwe spelvorm gewijd.

HOOFDSTUK 4: ANALYSE VAN HET SPEL MET ONVOORWAARDELIJKE PAS (met perfect geheugen)

Wanneer we eenmaal de afschatting $\frac{k}{2} \leq w(k,B,P) \leq k$ ter beschikking hebben, blijkt het spel gemakkelijk te vereenvoudigen te zijn. In dit hoofdstuk komen achtereenvolgens aan de orde: het vereenvoudigde model met een rechtvaardiging (bewijs) voor de vereenvoudiginge, de resultaten van de computerberekeningen voor dit model en de theoretische onderbouwing van de resultaten.

§ 4.1 Vereenvoudigingen

In § 3.7.3 hebben we aangetoond dat T_5 beter is dan T_4 mits $w(K,B,P) \geq \frac{k}{2}$. Dit geld alleen voor de doorsnede van hun toepassingsgebieden. Hoe zit het buiten die doorsnede?

De randvoorwaarde voor T_4 is: $k \geq B+1 \wedge B \geq P+1$
De randvoorwaarde voor T_5 is: $k \geq B+1 \wedge B \geq P+1 \wedge B \geq 2$.
We zien dat het toepassingsgebied van T_4 die van T_5 omvat. Voor $B=1$ is T_4 wel en T_5 niet toepasbaar. Als we T_5 toch toepassen voor $B=1$ en daarbij bedenken dat we vanwege stelling 3.2. alleen geïnteresseerd zijn in $P=0$, blijkt dat $p_1 = p_3$ en $p_4 = 0$. Dat wil zeggen dat T_5 en T_4 voor $B=1$ een identieke winstfunctie krijgen.

Als we nu de randvoorwaarden voor T_5 zodanig verruimen dat T_5 ook toegepast kan worden voor $B=1$, kunnen we de volgende stelling formuleren:

Stelling 4.1 T_5 met als randvoorwaarde $k \geq B+1$ en $B \geq 1$

is onder alle omstandigheden minstens zo goed als T_4. T_4 kan daarom voortaan buiten beschouwing blijven.

Van de volgende stellingen geven we geen bewijs. We volstaan met de mededeling dat de bewijzen analoog zijn aan die van stelling 4.1.

Stelling 4.2 T_5 majoreert T_3 in het hele toepassingsgebied van T_3.

Stelling 4.3 T_5 (met de verruimde randvoorwaarde van stelling 4.1) majoreert T_9 in het hele toepassingsgebied van T_9

Stelling 4.4 T_6 majoreert T_8 (de toepassingsgebieden van beide taktieken vallen samen.)

Stelling 4.5 T_6 majoreert T_7 op het gemeenschappelijke toepassingsgebied. Voor $B=0$, het gebied waar wel T_7 maar niet T_6 van toepassing is, wordt T_6 identiek aan T_7 als het toepassingsgebied ervan wordt uitgebreid.

Met behulp van stelling 3.2 en de stellingen 4.1 t/m 4.5 kunnen we uit het oude model een nieuw model van het spel afleiden dat veel eenvoudiger is.

De toestandsvector heeft nog maar twee componenten: $\langle K,B \rangle$
(Alle toestanden met $P \ge 2$ hebben altijd als optimale taktiek T_1 en zijn daarom oninteressant)
De ongelijkheid 3.1. wordt nu: $K \ge \frac{K}{2} \ge B \ge 0$.

We definiëren hieronder de kansfactoren die in de winstfuncties voorkomen. De namen p_i komen overeen met de p_i in het oude model; alleen is overal $P=0$ gesubstitueerd.

Naam	Uitdrukking
p_1	$= B/(K-B)$
p_2	$= (K-2B)/(K-B) = 1-p_1$
p_5	$= 1/(K-B-1)$
p_6	$= B/(K-B-1)$
p_7	$= (K-2B-2)/(K-B-1) = 1-p_5-p_6$

De taktieken die we nog over hebben zijn:

T_2: "onvoorwaardelijke pas"
randvoorwaarde: géén.
$w_2(K,B) = \frac{K}{2}$

T_5: <onb, ALS kbn DAN nek ANDERS bzn>
randvoorwaarde: $B \ge 1$ (Er geldt nu altijd $K \ge B+1$)
$w_5(K,B) = p_1[w(K-2,B-1)+2] + p_2[K - w(K,B+1)]$

T_6: <onb, ALS kbn DAN nek ANDERS onb>
randvoorwaarde: géén.
$$w_6(K,B) = p_1[w(K-2,B-1)+2] + p_2[p_5[w(K-2,B)+2] + p_6[K-2-w(K-2,B)] + p_7[K-w(K,B+1)]]$$

§ 4.2 De resultaten voor het nieuwe model

Voor het nieuwe model is een nieuw computer-programma geschreven. Twee versies van het programma produceren een taktiekenschema resp. een "verwachte-winstenschema". Deze zijn te vinden op de volgende twee bladzijden.

Vanwege de lemma's van het vorige hoofdstuk zijn de toestanden $\langle K,B \rangle$ bij voorbaat voorgesteld als $\langle k, \frac{k}{2} \cdot N \rangle$ en voor gelijke k gerangschikt naar oplopende N. Deze volgorde komt overeen met de berekeningsvolgorde.

TAKTIEKENSCHEMA VOOR MEMORY MET ONVOORWAARDELIJKE PAS:
VERTIKAAL IS K UITGEZET EN HORIZONTAAL N, WAARBIJ B=K/2-N.

N: K:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
2:	65	6																																							
4:	65	6	2																																						
6:	65	6	2	2																																					
8:	65	62	5	6	2																																				
10:	65	2	5	6	2	2																																			
12:	65	2	5	6	5	6	2																																		
14:	65	2	5	6	5	6	5	6																																	
16:	65	2	5	6	5	6	5	6	2																																
18:	65	2	5	6	5	6	5	6	5	6																															
20:	65	2	5	6	5	6	5	6	5	6	2																														
22:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6																													
24:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	2																												
26:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																											
28:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																										
30:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																									
32:	65	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																								
34:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																							
36:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																						
38:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																					
40:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																				
42:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																			
44:	65	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																		
46:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6																	
48:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2																
50:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6															
52:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2														
54:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6													
56:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2												
58:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6											
60:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2										
62:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6									
64:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2								
66:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6							
68:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2						
70:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6					
72:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2				
74:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6			
76:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2		
78:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	
80:	65	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	2	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	2

DE VERWACHTE WINSTEN VOOR MEMORY MET ONVOORWAARDELIJKE PAS:
VERTIKAAL IS K UITGEZET EN HORIZONTAAL N, WAARBIJ B=K/2-N.

N: / K:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2:	2.000	2.000																
4:	4.000	2.667	2.000															
6:	6.000	3.333	3.000	3.000														
8:	8.000	4.000	4.333	4.143	4.000													
10:	10.000	5.000	5.571	5.143	5.000	5.000												
12:	12.000	6.000	6.786	6.119	6.105	6.004	6.000											
14:	14.000	7.000	7.992	7.090	7.235	7.029	7.050	7.050										
16:	16.000	8.000	9.195	8.061	8.371	8.048	8.109	8.032	8.000									
18:	18.000	9.000	10.397	9.032	9.508	9.059	9.174	9.023	9.037	9.037								
20:	20.000	10.000	11.598	10.002	10.645	10.065	10.245	10.019	10.098	10.038	10.000							
22:	22.000	11.000	12.799	11.000	11.768	11.057	11.326	11.025	11.153	11.033	11.016	11.016						
24:	24.000	12.000	13.999	12.000	12.884	12.045	12.412	12.030	12.206	12.028	12.067	12.020	12.000					
26:	26.000	13.000	15.199	13.000	13.997	13.034	13.499	13.034	13.261	13.025	13.118	13.023	13.018	13.018				
28:	28.000	14.000	16.399	14.000	15.110	14.022	14.586	14.036	14.318	14.023	14.167	14.024	14.056	14.016	14.000			
30:	30.000	15.000	17.600	15.000	16.221	15.012	15.673	15.036	15.376	15.022	15.216	15.024	15.096	15.016	15.019	15.019		
32:	32.000	16.000	18.800	16.000	17.333	16.001	16.760	16.035	16.435	16.022	16.264	16.024	16.136	16.017	16.052	16.018	16.000	
34:	34.000	17.000	20.000	17.000	18.444	17.000	17.842	17.029	17.498	17.023	17.311	17.022	17.178	17.018	17.086	17.017	17.014	17.014

§ 4.3. Theoretische onderbouwing van de resultaten

Als we het taktiekenschema bekijken valt het volgende op.

- voor de kolommen met even N is T_5 optimaal. (behalve voor N=0, het triviale geval zie § 3.7.2) bij B=0 is T_5 niet toepasbaar en blijft T_2 optimaal te zijn.
- voor de kolommen met oneven N is T_6 optimaal tot een zekere k, waarna T_2 optimaal wordt. De overgang T_6-T_2 blijkt lineair van k af te hangen.

Hoe pakken we de theoretische onderbouwing aan? We zijn van plan de kolommen één voor één te onderzoeken en hopen na een tijd op een regelmaat te stuiten. die we dan kunnen proberen te bewijzen.

§ 4.3.1 Nader onderzoek van de kolommen

N=0, N=1

Deze gevallen zijn al in § 3.7.2 onderzocht. Uiteraard verandert er niets aan deze kolommen door de overgang naar het nieuwe model.

N=2

Beschouw T_5 vanaf $k \geq 8$:

$$w_5\left(k+2, \frac{k+2}{2}-2\right) = \frac{k/2-1}{k/2+3}\left[w\left(k, \frac{k}{2}-2\right)+2\right] + \frac{4}{\frac{k}{2}+3}\left[k+2 - w\left(k+2, \frac{k+2}{2}-1\right)\right]$$

Merk op dat geldt. $w\left(k+2, \frac{k+2}{2}-1\right) = \frac{k+2}{2}$ (N=1)

Stel verder: $f_5(k) = w_5\left(k, \frac{k}{2}-2\right)$.

We krijgen dan:

$$f_5(k+2) = \frac{k-2}{k+6}\left[f_5(k)+2\right] + \frac{8}{k+6}\cdot\frac{k+2}{2}$$

ofwel. $(k+6)f_5(k+2) = (k-2)f_5(k) + 6k + 4$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid met $(k+4)(k+2)k$.

$$(k+6)(k+4)(k+2)k\,f_5(k+2) = (k+4)(k+2)k(k-2)f_5(k) + (6k+4)(k+4)(k+$$

Stel nu $g_5(k) = (k+4)(k+2)k(k-2)f_5(k)$.

$$g_5(k+2) = g_5(k) + (6k+4)(k+4)(k+2)k$$

Door herhaalde substitutie volgt dan:

$$g_5(k+2) = \sum_{L=6,\text{even}}^{k} (6L+4)(L+4)(L+2)L + g(6)$$

Na gebruik van de somformules uit Appendix A en veel rekenwerk wordt gevonden:

$$g_5(k+2) = \frac{3}{5}k^5 + 8k^4 + 36k^3 + 64k^2 + \frac{192}{5}k - 384$$

en dus. $w_5\left(k+2, \frac{k+2}{2}-2\right) = f_5(k) = \dfrac{3/5\,k^5 + 8k^4 + 36k^3 + 64k^2 + 192/5 - 384}{(k+6)(k+4)(k+2)k}$

De breuk laat zich vereenvoudigen tot:

$$w_5\left(k+2, \frac{k+2}{2}-2\right) = \frac{3}{5}k + \frac{4}{5} - \frac{384}{(k+6)(k+4)(k+2)k}$$

(Ga na dat deze ingewikkelde uitdrukking voor de winst precies de resultaten geeft van de computerberekeningen voor de verwachte winst).

Het is duidelijk dat T_5 tot in het oneindige beter is dan T_2: de richtingscoefficient van w_5 is immers groter dan $1/2$.
Het bewijs dat T_5 ook altijd beter is dan T_6. De voor het bewijs te volgen methode is in § 3.7.2 onder $N=2$ uiteengezet. We zullen hier het bewijs niet geven, maar volstaan met de mededeling dat T_5 inderdaad beter is dan T_6 voor $N=2$.

Uit het resultaat voor $w_5(k, \frac{k}{2}-2)$ kunnen we de volgende conclusie trekken:

De berekening is zeer tijdrovend; de berekeningen voor de volgende kolommen zullen nog ingewikkelder worden omdat de resultaten van een berekende kolom gesubstitueerd moeten worden in de formule van de volgende. Het is ondoenlijk om op deze manier door te gaan.

Merk echter op, dat de laatste term uit het resultaat voor $w_5(k, \frac{k}{2}-2)$ al gauw verwaarloosbaar klein wordt.

$$w_5(k, \tfrac{k}{2}-2) = \frac{3}{5}k - \frac{2}{5} - \frac{384}{(k+4)(k+2)k(k-2)}$$

$w_5(k, \frac{k}{2}-2) \approx \frac{3}{5}k - \frac{2}{5}$ is een zeer goede benadering.

We besluiten daarom de volgende kolommen niet exact door te rekenen, maar te benaderen. Om gemakkelijk over benaderingen te kunnen praten, introduceren we de zgn. CHM-rekening, die in de volgende paragraaf zal worden verduidelijkt.

§ 4.3.2. De CHM-rekening

De afkorting CHM staat voor Coëfficiënten van de Hoogste Machten.
Per definitie mogen we vanaf nu voor

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + a_{-1}x^{-1} + \dots \; a_{-m}x^{-m}$$

ook schrijven: $v_x\langle n, a_n\rangle\langle n-1, a_{n-1}\rangle$

De "v" is afkomstig van "vorm" (in x). De x als subscript van v laten we weg als er geen verwarring mogelijk is. Verder zijn hier de twee hoogste machten met hun coëfficienten in de notatie gerepresenteerd, maar het aantal twee is willekeurig. In het vervolg rekenen we wel steeds met de twee hoogste machten.

De rekenregels voor de CHM-rekening luiden:

- $v\langle n,a_n\rangle\langle n-1,a_{n-1}\rangle \pm v\langle m,b_m\rangle\langle m-1,b_{m-1}\rangle$

  Coëfficienten van gelijke machten worden bij elkaar opgeteld of van elkaar afgetrokken. Omdat het resultaat weer uit twee machten bestaat, treedt verwaarlozing van de te lage machten op.

  Als $n=m$ en $a_n \pm a_m = 0$ treedt er nauwkeurigheidsverlies op. Dit moeten we op de koop toe nemen.

- $v\langle n,a_n\rangle\langle n-1,a_{n-1}\rangle \cdot v\langle m,b_m\rangle\langle m-1,b_{m-1}\rangle =$

  $v\langle n+m, a_n \cdot b_m\rangle\langle n+m-1, a_n \cdot b_{m-1} + a_{n-1}\cdot b_m\rangle$

- $\dfrac{v\langle n,a_n\rangle\langle n-1,a_{n-1}\rangle}{v\langle m,b_m\rangle\langle m-1,b_{m-1}\rangle} = v\langle n-m, \dfrac{a_n}{b_m}\rangle\langle n-m-1, \dfrac{a_{n-1}}{b_m} - \dfrac{a_n b_{m-1}}{b_m^2}\rangle$

Opmerking De CHM-methode pretendeert niet een goede benaderingsmethode te zijn. Achteraf zal blijken dat de geboden nauwkeurigheid voor ons doel voldoende is.

§ 4.3.3 Nader onderzoek van de kolommen m.b.v. de CHM-rekening

N = 3

In deze kolom is de overgang van T_6 naar T_2 interessant. We proberen of we deze overgang m.b.v. de CHM-rekening kunnen bepalen. We beschouwen daartoe $w_6(k, \frac{k}{2}-3)$ voor $k \geq 8$.

$$w_6(k,\tfrac{k}{2}-3) = \frac{k/2-3}{k/2+3}\left[w(k-2,\tfrac{k-2}{2}-3)+2\right] + \frac{6}{k/2+3}\left[\frac{1}{k/2+2}\left[w(k-2,\tfrac{k-2}{2}-2)+2\right] + \frac{k/2-3}{k/2+2}\left[k-2-w(k-2,\tfrac{k-2}{2}-2)\right] + \frac{4}{k/2+2}\left[k-w(k,\tfrac{k}{2}-1)\right]\right]$$

We stellen: $f_6(k) = w_6(k, \frac{k}{2}-3)$.

Verder geldt: $w(k-2, \frac{k-2}{2}-2) = V_k\langle 1, \frac{3}{5}\rangle\langle 0, -\frac{8}{5}\rangle$ $(N=2)$

en dus: $w(k-2, \frac{k-2}{2}-2)+2 = V\langle 1, 3/5\rangle\langle 0, 2/5\rangle$

$k-2-w(k-2, \frac{k-2}{2}-2) = V\langle 1, \frac{2}{5}\rangle\langle 0, -2/5\rangle$

en ook: $w(k, \frac{k}{2}-1) = k/2$ $(N=1)$

Invullen geeft:

$$f_6(k) = \frac{k-6}{k+6}\left[f_6(k-2)+2\right] + \frac{12}{k+6}\left[\frac{2}{k+4}\cdot V\langle 1,3/5\rangle\langle 0,2/5\rangle + \frac{k-6}{k+4}\cdot V\langle 1,2/5\rangle\langle 0,-2/5\rangle + \frac{8}{k+4}\cdot\frac{k}{2}\right]$$

Na enig rekenwerk volgt dan:

$$(k+6)f_6(k) = (k-6)f_6(k-2) + V\langle 1,\tfrac{34}{5}\rangle\langle 0,-\tfrac{12}{5}\rangle$$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid met $(k+4)(k+2)k(k-2)(k-4) = V\langle 5,1\rangle\langle 4,0\rangle$

en stel $g_6(k) = (k+6)(k+4)(k+2)k(k-2)(k-4)\,f_6(k)$.

We krijgen dan:

$$g_6(k) = g_6(k-2) + V\langle 6, \tfrac{34}{5}\rangle\langle 5, -\tfrac{12}{5}\rangle$$

Na herhaalde substitutie volgt:

$$g_6(k) = \sum_{L=8,\text{even}}^{k} V_L\langle 6,\tfrac{34}{5}\rangle\langle 5,-\tfrac{12}{5}\rangle + g(6)$$

$g(6)$ is een constante en wordt volgens de CHM-rekening verwaarloosd.

Door gebruik te maken van stelling A.2 uit Appendix A wordt gevonden:

$$g_6(k) = V\langle 7, \tfrac{17}{35}\rangle\langle 6, \tfrac{16}{5}\rangle$$

en dus.

$$w_6(k,\tfrac{k}{2}-3) = f_6(k) = \frac{V\langle 7, 17/35\rangle\langle 6, 16/5\rangle}{(k+6)(k+4)(k+2)k(k-2)(k-4)} = \frac{V\langle 7, 17/35\rangle\langle 6, 16/5\rangle}{V\langle 6,1\rangle\langle 5,6\rangle}$$

$$= V\langle 1, \tfrac{17}{35}\rangle\langle 0, \tfrac{10}{35}\rangle$$

Dus $w_6(k, \frac{k}{2}-3) \simeq \dfrac{17k+10}{35}$

Deze benadering gebruiken we om het snijpunt met $\frac{k}{2}$ (de verwachte winst van T_2) te vinden:

$$\frac{17k+10}{35} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 20.$$

Voor $k=20$ zijn T_6 en T_2 volgens onze benadering even goed. Uit de computerberekening volgt dat voor $k=20$ de verwachte winst van T_6 niet exact 10 is maar 10.002. De overgang tussen T_6 en T_2 zit tussen $k=20$ en

$k=22$. We kunnen tevreden zijn over onze benaderingsmethode.

N=4

We beschouwen T_5 voor $k \geq 12$. De berekening verloopt op een soortgelijke manier als voor N=3. Er zijn echter twee berekeningen nodig, omdat de winstfunctie voor N=3 uit twee delen bestaat. We vinden:

$$w(k, \tfrac{k}{2}-4) \simeq \frac{179\,k - 226}{315} \quad \text{voor } 12 \leq k \leq 20$$

$$w(k, \tfrac{k}{2}-4) \simeq \frac{5k-4}{9} \quad \text{voor } k \geq 22$$

N=5

Voor T_6 vanaf $k \geq 12$ moeten net als hierboven twee berekeningen worden gedaan. (De overgang $T_6 - T_2$ in de kolom voor N=3 heeft zijn invloed op alle kolommen rechts ervan)
We zijn echter voornamelijk geïnteresseerd in de overgang $T_6 - T_2$ in deze kolom en volstaan daarom met de berekening van $w_6(k, \frac{k}{2}-5)$ voor het tweede deel van de kolom. (Merk op, dat we dit kunnen doen, omdat in de oplossing van de differentievergelijkingen volgens de CHM-methode de beginvoorwaarde wegvalt).
We vinden:

$$w_6(k, \tfrac{k}{2}-5) \simeq \frac{49k+16}{99} \quad \text{voor } k \geq 22.$$

Voor het snijpunt met k/2 vinden we.

$$\frac{49k+16}{99} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 32.$$

Volgens de computerberekeningen zit de overgang tussen T_6 en T_2 niet op precies $k=32$, maar tussen $k=32$ en $k=34$.

N > 5?

We hadden gehoopt een zekere regelmaat te ontdekken in de uitdrukkingen voor de verwachte winst voor de kolommen N=0 t/m N=5. Echter, de regelmaat die er misschien is, is niet gemakkelijk te ontdekken. Het doorrekenen van nog meer kolommen op de bovenstaande manier hebben we afgewezen vanwege de grote rekeninspanning.

Een tijd later ontstond het idee om gewoonweg N te handhaven in $w(k, \frac{k}{2}-N)$ i.p.v. een konstante waarde voor N in te vullen. Dit heeft tot interessante resultaten geleid zoals we later zullen zien.

We hebben ons beperkt tot het gebied rondom de overgangen $T_6 - T_2$ (Dit is het meest interessante gebied). De twee berekeningen die gedaan zijn zijn:

1) $w_5(k, \frac{k}{2}-N)$, voor N is even.
We hebben hierbij aangenomen, dat de optimale taktiek in de linker kolom (N−1) T_2 is. Aangezien w_5 alleen naar de eerste linker kolom verwijst is de berekening mogelijk.

2) $w_6(k, \frac{k}{2}-N)$, voor N is oneven.

w_6 verwijst naar de eerste twee linker kolommen. Voor de eerste linker kolom maken we gebruik van de bovengenoemde berekening. Voor de tweede linker kolom nemen we aan dat T_2 de optimale taktiek is.

Hieronder volgen de twee berekeningen

N is even

$$w_5(k, \tfrac{k}{2} - N) = \frac{k/2 - N}{k/2 + N}\left[w(k-2, \tfrac{k-2}{2} - N) + 2\right] + \frac{2N}{\frac{k}{2}+N}\left[k - w(k, \tfrac{k}{2} - (N-1))\right]$$

Stel $f_5(k) = w_5(k, k/2 - N)$

Bovendien geldt: $w(k, \tfrac{k}{2} - (N-1)) = \frac{k}{2}$ (linker kolom!)

Dus

$$f_5(k) = \frac{k-2N}{k+2N}\left[f_5(k-2) + 2\right] + \frac{4N}{k+2N} \cdot \frac{k}{2}$$

$$(k+2N) f_5(k) = (k-2N) f_5(k-2) + (2+2N)k - 4N$$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid met:

$$(k-2N+2)(k-2N+4) \quad k \quad \ldots (k+2N-4)(k+2N-2)$$

en stel $g_5(k) = (k-2N+2) \quad k \ldots (k+2N-2)(k+2N) f_5(k)$

We krijgen dan:

$$g_5(k) = g_5(k-2) + ((2N+2)k - 4N)(k-2N+2) \ldots (k+2N-2)$$

$$g_5(k) = g_5(k-2) + v\langle 2N, 2N+2\rangle\langle 2N-1, -4N\rangle$$

Door herhaalde substitutie volgt:

$$g_5(k) = \sum_{L=L_{0,\text{even}}}^{k} v_L\langle 2N, 2N+2\rangle\langle 2N-1, -4N\rangle + \text{"verwaarloosbare beginwaarde"}.$$

Door toepassing van stelling A.2 krijgen we:

$$g_5(k) = v\langle 2N+1, \tfrac{N+1}{2N+1}\rangle\langle 2N, N\rangle$$

$$w_5(k, \tfrac{k}{2} - N) = f_5(k) = \frac{V\langle 2N+1, \frac{N+1}{2N+1}\rangle\langle 2N, N\rangle}{v\langle 2N, 1\rangle\langle 2N-1, 2N\rangle} = V\langle 1, \tfrac{N+1}{2N+1}\rangle\langle 0,$$

Dus: $w_5(k, \tfrac{k}{2} - N) \simeq \dfrac{(N+1)k - N}{2N+1}$

(Merk op, dat deze formule voor alle apart berekende N klopt, zelfs voor $N=0$).

In de berekening hieronder zullen we nodig hebben:

$$w_5(k-2, \tfrac{k-2}{2} - (N-1)) = \frac{Nk - 3N + 1}{2N-1} \quad (N \text{ is oneven})$$

N is oneven

We herschrijven voor dit doel $w_6(k, B)$.

$$w_6(k, B) = p_1\left[w(k-2, B-1) + 2\right] + p_2\left[(p_5 - p_6)\left[w(k-2, B) + 2\right] + p_6 k + p_7\left[k - w(k, B+2)\right]\right]$$

(gelijke termen achter p_5 en p_6 zijn samengenomen; dit bespaart rekenwerk)

$$w_6(k, \tfrac{k}{2} - N) = \frac{k-2N}{k+2N}\left[w_6(k-2, \tfrac{k-2}{2} - N) + 2\right] + \frac{4}{k+2N}\left[\frac{1 - \frac{k}{2} + N}{\frac{k}{2} + N - 1} \cdot \left[w(k-2, \tfrac{k-2}{2} - (N-1)) + 2\right] + \frac{k/2 - N}{\frac{k}{2} + N - 1} \cdot k + \frac{2N-2}{\frac{k}{2} + N - 1}\left[k - w(k, \tfrac{k}{2} - (N-2))\right]\right]$$

We stellen: $w_6(k, \tfrac{k}{2} - N) = f_6(k)$

verder geldt: $w(k-2, \tfrac{k-2}{2} - (N-1)) = v\langle 1, \tfrac{N}{2N-1}\rangle\langle 0, \tfrac{-3N+1}{2N-1}\rangle$